О КРИВИЗНЕ ПРОСТРАНСТВА.

§ I.

I. В своих известных работах посвященных общим космологическим вопросам Einstein x/ и De Sitter xx/ приходят к двум мыслимым типам вселенной; Einstein получает так называемый цилиндрический мир, в котором пространство xxx/ обладает постоянной, не меняющейся с течением времени, кривизной, причем радиус кривизны связывается с общей массой материи, расположенной в пространстве; De Sitter получает шаровой мир, в котором уже не только пространство, но и весь мир обладает до известной степени характером мира постоянной кривизны. xy/ При этом и Einstein и De Sitter предполагают определенный характер тензора материи, отвечающий гипотезе не связанности материи и ее относительному ~~?~~ покою, иначе говоря достаточной малости скоростей материи по сравнению с фундаментальной скоростью yy/, т.е. со скоростью света.

Настоящая заметка имеет своей целью, во первых получить цилиндрический и сферический мир как частные типы вытекающие из некоторых общих положений, а затем указать возможность получения особого мира, кривизна пространства которого постоянная относительно трех, принятых за пространственные координат, меняется с течением времени, т.е. зависит от четвертой, принятой за временную, координаты; этот новый тип вселенной в остальных своих свойствах напоминает цилиндрический мир Einstein'a.

2. Предположения, которые мы положим в основу наших соображений распадаются на два класса. К первому классу относятся предположения, одинаковые с теми, которые делают Einstein и De Sitter и которые относятся к уравнениям управляю-

---

x/ Einstein, Kosmologische Betrachtungen zur allgemeinen Relativitätstheorie, Sitzber. Berl. Akad., 1917.

xx/ De Sitter, On Einstein's theory of gravitation and its astronomical consequences, Monthly Notices of the R. Astronom. Soc., 1916-1917.

xxx/ Под пространством будем подразумевать пространство описываемое многообразием трех измерений, относя термин "мир" к пространству описываемому многообразием четырех измерений.

xy/ См. Klein, Ueber die Integralform der Erhaltungssätze und die Theorie der räumlich-geschlossenen Welt, Götting. Nachr. 1918.

yy/ См. этот термин у Eddington'a в книге „Espace, Temps et Gravitation, 2 Partie, p. 10, Paris, 1921.

щим гравитационными потенциалами и к характеру состояния и движения материи в пространстве. Ко второму классу относятся предположения об общем, так сказать геометрическом, характере нашего мира; из принятой нами гипотезы в виде частных случаев могут быть получены, как цилиндрический мир Einstein'a, так и шаровой мир de Sitter'a.

Предположения первого класса следующие:

I/ Гравитационные потенциалы удовлетворяют системе уравнений Einstein'a с так называемым „космологическим" членом, который может быть в частности равен нулю:

$$(A) \qquad R_{ik} - \frac{1}{2} g_{ik} R + \lambda g_{ik} = -\varkappa T_{ik} \quad (i,k = 1,2,3,4),$$

где g_{ik} гравитационные потенциалы, T_{ik} тензор материи, $\varkappa$ некоторая постоянная, $R = g^{ik} R_{ik}$, а тензор R_{ik} определяется равенствами:

$$(B) \qquad R_{ik} = \frac{\partial^2 \lg\sqrt{g}}{\partial x_i \partial x_k} - \frac{\partial \lg\sqrt{g}}{\partial x_\sigma}\left\{ {ik \atop \sigma} \right\} - \frac{\partial}{\partial x_\sigma}\left\{ {ik \atop \sigma} \right\} + \left\{ {i\alpha \atop \sigma} \right\}\left\{ {k\sigma \atop \alpha} \right\},$$

причем $x_i \; (i = 1,2,3,4)$ суть мировые координаты, а $\left\{ {ik \atop l} \right\}$ — символ Кристоффеля второго рода. x/

2/ Материя находится в не связанном состоянии и обладает взаимно относительным покоем; говоря менее строго, относительные скорости материи ничтожны сравнительно со скоростью света. При таких предположениях тензор материи T_{ik} определится равенствами:

$$(C) \qquad \begin{aligned} &T_{ik} = 0, \text{ если } i \text{ и } k \text{ одновременно не} = 4, \\ &T_{44} = c^2 \varrho g_{44} \end{aligned}$$

где ϱ плотность материи и c фундаментальная скорость; притом конечно мировые координаты разделены на две группы, x_1, x_2, x_3 названы пространственными, а x_4 временной координатой.

3/ Предположения второго класса сводятся к следующему:

I. По выделении из четырех мировых координат трех пространственных / x_1, x_2, x_3 /, мы будем иметь пространство постоянной кривизны, могущей однако меняться с ~~паде-~~ тече-

---

x/ Знак R_{ik} и скалярной кривизны R изменен на обратный сравнительно с обычными обозначениями этой величины.

нием четвертой временной координаты x_4. Интервалл[x/] ds определяемый равенством: $ds^2 = g_{ik}\,dx_i\,dx_k$ может быть написан при помощи соответствующего изменения пространственных координат в следующем виде:

$$ds^2 = R^2\left(dx_1^2 + \sin^2 x_1\, dx_2^2 + \sin^2 x_1 \sin^2 x_2\, dx_3^2\right) + 2g_{14}\,dx_1 dx_4 + 2g_{24}\,dx_2 dx_4 + 2g_{34}\,dx_3 dx_4 + g_{44}\,dx_4^2,$$

где R есть функция только от x_4; R является пропорциональным радиусу кривизны пространства, таким образом радиус кривизны пространства может меняться с течением времени.

2/. В выражении интервалла g_{14}, g_{24}, g_{34} обращаются в нуль при соотвествующем выборе временной координаты, иначе, кратко выражаясь, время ортогонально пространству. Это второе предположение не имеет, как мне кажется, в основе своей каких либо физических или философских соображений, и вводится исключительно в целях упрощения вычислений. Необходимо заметить, что мир Einstein'а и De Sitter'а являются частными случаями рассматриваемого предположения.

Предположения I/ и 2/ дают нам возможность написать ds^2 в следующем виде:

$$(D)\qquad ds^2 = R^2\left(dx_1^2 + \sin^2 x_1\, dx_2^2 + \sin^2 x_1 \sin^2 x_2\, dx_3^2\right) + M^2 dx_4^2,$$

где R зависит только от x_4, а M является вообще говоря функцией всех четырех мировых координат. Вселенная Einstein'а является частным случаем получаемым из формулы /D/ заменой R^2 на $-\frac{R^2}{c^2}$, и M на I, где R постоянный /не зависящий и от x_4!/ радиус кривизны пространства. Вселенная De Sitter'а получается, когда в формуле /D/ заменим R^2 на $-\frac{R^2}{c^2}$, а M на $\cos x_1$:

$$d\tau^2 = -\frac{R^2}{c^2}\left(dx_1^2 + \sin^2 x_1\, dx_2^2 + \sin^2 x_1 \sin^2 x_2\, dx_3^2\right) + dx_4^2, \quad \text{xx)}$$

$$d\tau^2 = -\frac{R^2}{c^2}\left(dx_1^2 + \sin^2 x_1\, dx_2^2 + \sin^2 x_1 \sin^2 x_2\, dx_3^2\right) + \cos^2 x_1\, dx_4^2.$$

4/ Необходимо сказать еще несколько слов о тех интервалах

---

x/ См. напр. Eddington, Espace, Temps et Gravitation, 2 Partie, Paris, 1921.

xx/ Придавая интервалу ds размер времени мы обозначим его через $d\tau$; в этом случае постоянная $\varkappa$ будет иметь размерность длину деленную на массу и в CGS - единицах будет равна $1,87 \times 10^{-27}$, см. Laue, Die Relativitätstheorie, Bd. II, p. 185, Braunschweig, 1921.

в которых заключены мировые координаты; иначе говоря необходимо условиться какие точки многообразия четырех измерений мы будем считать за различные; не входя в более подробные пояснения, условимся пространственные координаты изменять в следующих интервалах; x_1 в интервале $/0, \pi/$, x_2 в интервале $/0, \pi/$ и x_3 в интервале $/0, 2\pi/$, что же касается до временной координаты, то вопрос об интервале изменения ее оставим открытым, вернувшись к нему в дальнейшем.

"§ 2.

1. Пользуясь уравнениями /A/ и /C/ в предположении, что гравитационные потенциалы определяются равенством /D/ и полагая i = I,2,3, κ = 4 в уравнениях /A/ найдем:

$$R'(x_4)\frac{\partial M}{\partial x_1} = R'(x_4)\frac{\partial M}{\partial x_2} = R'(x_4)\frac{\partial M}{\partial x_3} = 0,$$

каковые равенства дают два случая: I) $R'(x_4) = 0$, R не зависит от x_4, и является постоянной, - назовем этот случай стационарным миром и II) $R'(x_4)$ не $= 0$, M зависит только от x_4 - назовем этот случай не стационарным миром.

Обращаясь сначала к стационарному миру, выпишем уравнения /A/ для i, κ = I,2,3 в предположении различных индексов, уравнения эти дадут нам такую систему формул:

$$\frac{\partial^2 M}{\partial x_1 \partial x_2} - \operatorname{cotg} x_1 \frac{\partial M}{\partial x_2} = 0,$$

$$\frac{\partial^2 M}{\partial x_1 \partial x_3} - \operatorname{cotg} x_1 \frac{\partial M}{\partial x_3} = 0,$$

$$\frac{\partial^2 M}{\partial x_2 \partial x_3} - \operatorname{cotg} x_2 \frac{\partial M}{\partial x_3} = 0,$$

интегрируя эти уравнения найдем:

$$(1) \qquad M = A(x_3, x_4)\sin x_1 \sin x_2 + B(x_2, x_4)\sin x_1 + C(x_1, x_4),$$

где A,B,C произвольные функции своих аргументов. Разрешая обычными приемами уравнения /A/ относительно тензора $R_{i\kappa}$, исключая из полученных и не использованных еще уравнений неизвестную плотность ϱ x/ и подставляя выражение /I/ для

---

x/ Плотность ϱ является у нас неизвестной функцией мировых координат x_1, x_2, x_3, x_4.

M в эти уравнения, мы после довольно длинных, но совершенно элементарных вычислений найдем, что для M возможны следующие два выражения

/2/ $$M = M_0 = \mathrm{const.}$$

/3/ $$M = (A_0 x_4 + B_0)\cos x_1,$$

где M_0, A_0, B_0 постоянные величины.

В случае, когда M равно постоянному мы имеем для стационарного мира, случай цилиндрического мира. В этом случае удобнее оперировать с гравитационными потенциалами получаемыми из формулы /D_1/; определяя плотность и величину λ, мы получим известный результат Einstein'a:

$$\lambda = \frac{c^2}{R^2},\ \rho = \frac{2}{\varkappa R^2},\ M = \frac{4\pi^2}{\varkappa}R,$$

где M общая масса всего пространства.

В другом возможном случае, когда M определяется из формулы /3/, мы, с помощью рационального изменения x_4 x/ приходим к шаровому миру De Sitter'a, в котором $M=\cos x_1$; пользуясь формулой /D_2/ найдем следующие соотношения De Sitter'a:

$$\lambda = \frac{3c^2}{R^2},\ \rho = 0,\ M = 0.$$

Таким образом стационарный мир может быть или цилиндрическим миром Einstein'a или сферическим миром De Sitter'a.

2. Обратимся теперь к изучению другого возможного мира, - не стационарного. В этом случае M есть функция только x_4, соответственно изменяя x_4 мы можем, без ограничения общности положить $M = 1$; имея в виду бо́льшие удобства наших обычных представлений напишем ds^2 в форме аналогичной /D_1/ и /D_2/:

$$(D_3)\quad ds^2 = -\frac{R^2(x_4)}{c^2}\left(dx_1^2 + \sin^2 x_1\, dx_2^2 + \sin^2 x_1 \sin^2 x_2\, dx_3^2\right) + dx_4^2,$$

нашей задачей явится определение R и ρ из уравнений /A/. Очевидно, что уравнений /A/ в которых значки различны ничего не дадут; уравнения /A/ в которых $i = k = 1,2,3$ дадут одно соотношение:

---

x/ Указанное изменение производится помощью формулы: $d\bar{x}_4 = \sqrt{A_0 x_4 + B_0}\, dx_4$.

с уравнение

$$/4/ \qquad \frac{R'^2}{R^2} + \frac{2RR''}{R^2} + \frac{c^2}{R^2} - \lambda = 0$$

а уравнение /А/, в котором $i = \kappa = 4$ даст равенство:

$$/5/ \qquad \frac{3R'^2}{R^2} + \frac{3c^2}{R^2} - \lambda = \varkappa c^2 \varrho ,$$

причем $R' = \frac{dR}{dx_4}$, $R'' = \frac{d^2R}{dx_4^2}$.

Таккак R' не = 0, то интеграция уравнения /4/ после замены в целях удобства письма x_4 на t даст нам следующее уравнение:

$$/6/ \qquad \frac{1}{c^2}\left(\frac{dR}{dt}\right)^2 = \frac{A - R + \frac{\lambda}{3c^2} R^3}{R}$$

где А произвольная постоянная; из этого уравнения R получится путем обращения некоторого эллиптического интеграла, т.е. путем решения относительно R уравнения:

$$/7/ \qquad t = \frac{1}{c}\int_a^R \sqrt{\frac{x}{A - x + \frac{\lambda}{3c^2}x}}\, dx + B$$

где В и a постоянные; при этом конечно должно помнить об обычных условиях изменения знака у квадратного корня.

Уравнение /5/ даст нам возможность определить ϱ :

$$/8/ \qquad \varrho = \frac{3A}{\varkappa R^3},$$

через всю массу M пространства, постоянная A выразится следующим равенством:

$$/9/ \qquad A = \frac{\varkappa M}{6\pi^2}$$

принимая, что масса M величина положительная, мы и для А получим положительное значение.

3/ Изучение не стационарного мира основано на изучении уравнения /6/ или /7/; при этом конечно, величина λ не определяется сама собой и мы при изучении уравнений /6/ или /7/ будем предполагать, что λ может принимать любое значение. Определим те значения переменной x ,при которых квадратный корень входящий в формулу /7/ может изменить свой знак. Ограничиваясь случаем положительного радиуса кривизны, нам достаточно рассмотреть значения для x ,при которых подкоренное количество обращается в нуль или бесконечность в интервале / $0, \infty$ / для x ,т.е. для положительных x .

Одно из значений x при котором квадратный корень в формуле /7/ обращается в нуль есть значение $x = 0$; другие значения x, при которых квадратный корень в формуле /7/ может изменять свой знак найдутся изучая положительные корни уравнения $A - x + \frac{\lambda}{3c^2} x^3 = 0$;

обозначая $\frac{\lambda}{3c^2}$ через y построим семейство кривых третьяго порядка в плоскости / x, y / определяемое уравнением:

$$/10/ \quad y x^3 - x + A = 0$$

где А параметр семейства меняющийся в интервалле /$0, \infty$/. Кривые нашего семейства (см.черт.) пересекают ось x-ов в точке $x = A, y = 0$ и имеют максимум в точке:

$$x = \frac{3A}{2}, \; y = \frac{4}{27A^2}.$$

Рассмотрение чертежа показывает, что при отрицательных λ, уравнение $A - x + \frac{\lambda}{3c^2} x^3 = 0$ имеет один положительный корень x_0 лежащий в интервалле /$0, A$/; рассматривая x_0 как функцию λ и A:

$$x_0 = \theta(\lambda, A)$$

найдем, что θ возрастающая функция от λ и возрастающая функция от А. Далее, если λ лежит в интервалле $(0, \frac{4}{9}\frac{c^2}{A^2})$, то уравнение наше будет иметь два положительных корня $x_0 = \theta(\lambda, A)$ и $x_0' = \vartheta(\lambda, A)$, причем x_0 лежит в интервалле $(A, \frac{3A}{2})$, а x_0' в интервалле $(\frac{3A}{2}, \infty)$; $\theta(\lambda, A)$ будет возрастающей функцией как от λ, так и от А; $\vartheta(\lambda, A)$ будет убывающей функцией от λ и от А. Наконец если λ больше $\frac{4}{9}\frac{c^2}{A^2}$, то наше уравнение вовсе не будет иметь положительных корней.

Приступая к исследованию формулы /7/ сделаем одно замечание; в начальный момент, т.е. при $t = t_0$, пусть радиус кривизны будет равен R_0; в этот начальный момент квадратный корень стоящий в формуле /7/ будет иметь знак плюс или минус, смотря потому, возрастает ли радиус кривизны с течением времени при $t = t_0$ или нет; изменяя время t на $-t$ мы всегда можем приписать этому квадратному корню знак плюс, иначе говоря, без ограничения общности, можем время выбрать так, чтобы радиус кривизны в рассматриваемый начальный момент $t = t_0$ возрастал бы с течением времени.

4/. Рассмотрим случай, когда $\lambda > \frac{4}{9}\frac{c^2}{A^2}$, когда следовательно, уравнение $A - x + \frac{\lambda}{3c^2}x^3 = 0$ не имеет положительных корней. В этом случае уравнение /7/ перепишется следующим образом:

/II/ $$t - t_0 = \frac{1}{c}\int_{R_0}^{R}\sqrt{\frac{x}{A - x + \frac{\lambda}{3c^2}x^3}}\,dx,$$

причем, согласно замечанию сделанному в конце предыдущего пункта квадратный корень будет всегда положителен. Отсюда следует, что R будет возрастающей функцией от t; на начальное значение радиуса кривизны R_0 ~~плоских~~ никаких, в этом случае, ограничений не налагается.

Так как радиус кривизны не может быть меньше нуля, то уменьшаясь от R_0 с уменьшением t согласно формуле /II/ радиус кривизны через некоторый промежуток времени t' дойдет до нуля. Пользуясь очевидной аналогией будем называть промежуток времени понадобившийся, чтобы радиус кривизны от 0 дошел бы до R_0 — временем прошедшим от сотворения мира x/; этот промежуток t' определяется равенством:

/I2/ $$t' = \frac{1}{c}\int_{0}^{R_0}\sqrt{\frac{x}{A - x + \frac{\lambda}{3c^2}x^3}}\,dx.$$

Условимся в дальнейшем рассматриваемый мир называть монотонным миром первого рода.

Время прошедшее от сотворения монотонного мира первого рода рассматриваемое как функция R_0, A, λ обладает следующими свойствами; I/ оно возрастает с увеличением R_0 2/ оно убывает с увеличением A, т.е. с увеличением массы материи пространства и 3/ оно убывает с увеличением λ. Если $A > \frac{2}{3}R_0$, то при любых λ время протекшее от сотворения мира конечно, если $A \le \frac{2}{3}R_0$, то всегда найдется такое характеристическое значение $\lambda = \lambda_1 = \frac{4c^2}{9A^2}$ что с приближением λ к этой величине время прошедшее

---

x/ Время прошедшее от сотворения мира характеризует время прошедшее от момента, когда пространство было точкой $(R = 0)$ до нынешнего его состояния $(R = R_0)$; это время может быть бесконечным.

от сотворения мира будет безпредельно возрастать.

5. Положим далее, что λ заключено в интервалле $/0, \frac{4c^2}{9A^2}/$, тогда начальное значение радиуса кривизны R_0 может лежать в одном из трех интервалов: $(0, x_0)$, (x_0, x_0'), (x_0', ∞). Если R_0 лежит в интервалле $/ x_0, x_0' /$, то квадратный корень в формуле /7/ имеет мнимое значение и пространство с такой начальной кривизной не может существовать. Случай, когда R_0 лежит в интервалле $/ 0, x_0 /$ мы рассмотрим в следующем пункте, теперь же остановимся на третьем случае, когда $R_0 > x_0'$ или $R_0 > \vartheta(\lambda, A)$; в этом случае рассуждениями аналогичными приведенным в предыдущем пункте можно показать, что R будет возрастающей функцией времени, причем R может меняться начиная с $x_0' = \vartheta(\lambda, A)$; промежуток времени прошедший с момента, когда $R = x_0'$ до момента, когда $R = R_0$ назовем временем протекшим от сотворения мира и обозначим через t':

$$t' = \frac{1}{c}\int_{x_0'}^{R_0} \sqrt{\frac{x}{A - x + \frac{\lambda}{3c^2}x^3}}\,dx. \qquad /13/$$

Условимся рассматриваемый мир называть монотонным миром второго рода. ~~Время протекшее от сотворения монотонного мира второго рода при малых λ [illegible] и может быть определено следующим приближенным /асимптотическим/ равенством:~~

~~/14/~~

6. Рассмотрим наконец случай, когда λ заключено в интервалле $/ -\infty, 0 /$. В этом случае, если $R_0 > x_0 = \theta(\lambda, A)$, то квадратный корень в формуле /7/ становится мнимым и следовательно пространство с указанным радиусом кривизны не может существовать. Если $R_0 < x_0$, то рассматриваемый случай будет совершенно одинаков со случаем опущенном при рассмотрении в предыдущем пункте; итак положим, что λ лежит в интервалле $\left(-\infty, \frac{4c^2}{9A^2}\right)$, а $R_0 < x_0$, x/ обычными рассуждениями можно в этом случае показать, что

---

x/ См.напр. Weierstrass, Ueber eine Gattung reell periodischer Functionen, Monatsber. d. Königl. Akad. d. Wissensch., 1866, а также Horn, Zur Theorie der kleinen endlichen Schwingungen, Ztschr. f. Mathem. und Physik, Bd. 47, 1902; в нашем случае необходимо конечно ввести некоторые видоизменения в рассуждения цитированных авторов; впрочем периодичность в нашем случае устанавливается путем элементарного рассмотрения.

R будет периодической функцией от t с периодом $t_п$, который мы назовем периодом мира и который будет определен равенством:

$$/14/ \qquad t_п = \frac{2}{c}\int_0^{x_0}\sqrt{\frac{x}{A - x + \frac{\lambda}{3c^2}x^3}}\,dx$$

причем радиус кривизны будет меняться от нуля до x_0. Условимся такого рода мир называть периодическим. Период периодического мира возрастает с возрастанием λ стремясь к безконечности когда λ стремится к $\lambda_1 = \frac{4c^2}{9A^2}$.

При малых λ период $t_п$ определяется приближенной формулой:

$$/15/ \qquad t_п = \frac{\pi A}{c}$$

На периодический мир можно смотреть с двух точек зрения; если считать два явления совпадающими коль скоро совпадают их пространственные координаты, а временные отличаются на кратное целое периодов, то радиус кривизны мира увеличиваясь сначала от 0 до x_0 будет затем уменьшаться до нуля; тогда время существования мира будет конечным.

С другой стороны если изменять время от $-\infty$ до $+\infty$, т.е. если считать два явления совпадающими, коль скоро совпадают не только их пространственные координаты, но и их временные координаты, то мы придем к действительной периодичности кривизны пространства.

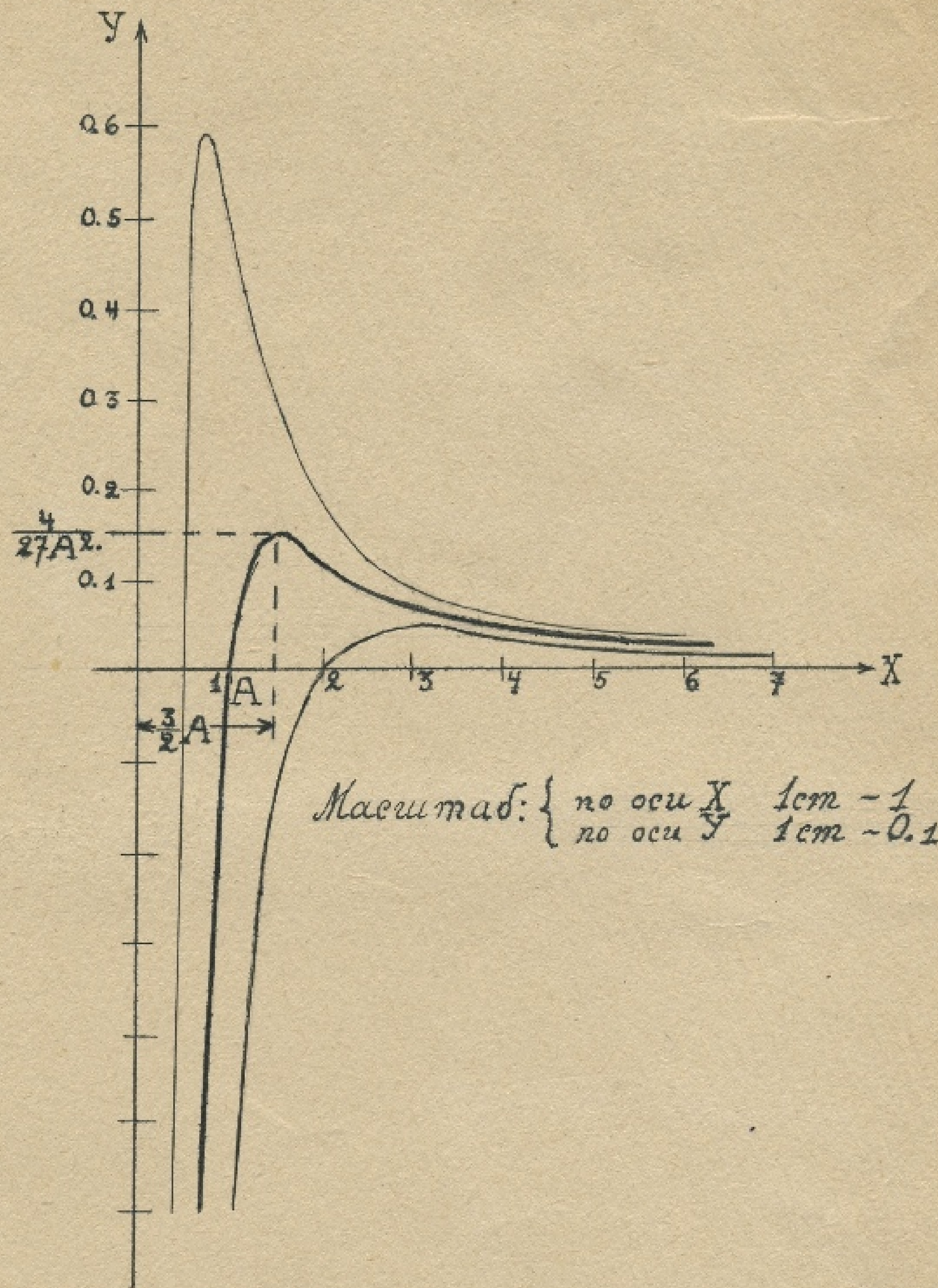
7. Данные, которыми мы располагаем совершенно недостаточны для каких либо численных подсчетов и для решения вопроса о том каким миром является наша вселенная; быть может проблема причинности и проблема центробежной силы прольют свет на рассматриваемые здесь вопросы. Следует отметить, что в полученных нами формулах "космологическая" величина λ не определяется, являясь ~~[illegible]~~ лишней константой задачи; быть может электродинамические соображения смогут определить эту величину. Полагая $\lambda = 0$ и считая M = массе 5×10^{21} наших солнц будем для периода мира иметь величину порядка 10 миллиардов лет. ~~Рассматривая монотонный мир второго рода будем при той же массе M иметь для времени прошедшего от~~

~~сотворения мира величину порядка 10^{12} лет, при~~ ~~$\lambda = 10^{-27}$~~. Эти цифры могут иметь, конечно, лишь иллюстративное значение.

А. Фридман

Профессор Механики Петроградского Политехнического Института.

Петроград.
29 мая 1922 года.


Y
0.6
0.5
0.4
0.3
0.2
$\frac{4}{27A^2}$
0.1
1
A
2
3
4
5
6
7
X
$\frac{3}{2}A$
Масштаб: { по оси X 1cm – 1
по оси Y 1cm – 0.1