К ВОПРОСУ

О ГЕОМЕТРИИ КРИВЫХ ПРОСТРАНСТВ.

К ВОПРОСУ О ГЕОМЕТРИИ КРИВЫХ ПРОСТРАНСТВ.

В своей известной книге „Raum, Zeit, Materie"
Weyl излагает начала геометрии кривых пространств пользуясь понятием о параллельном перемещении вектора более общим чем то, которое было развито Levi-Civita [1] и присоединяя к этому понятию новую и чрезвычайно оригинальную идею метрической связности пространства. Развитие указанных геометрических идей дало возможность Weyl'ю обобщить идеи Einstein'а и получить вывод уравнений Максвелла /с присоединением теории Mie / из геометрических свойств разбираемого им пространства.

Обобщив идею параллельного перемещения Weyl ввел, однако, целый ряд существенных ограничений; так напр. он предположил симметрию в нижних значках параметров $\Gamma^{i}_{\lambda\mu}$, а также определенным образом связал параллельное перемещени когредиентных и контрагредиентных векторов. С другой стороны в изложении Weyl'я неясна геометрическая причина почему изменение меры вектора при параллельном его перемещении пропорционально самой мере вектора.

In Darleg. von Weyl nicht deutlich geomet. Grund warum die Veränderung des Maßes eines Vectors bei seiner Parallelverschieb. proportional sein soll dem Maße des Vectors.

Имея в виду поразительные результаты полученные Weyl'ем, представляется небезинтересным освободиться от указанных выше ограничений, а также выяснить геометрическую причину того особого вида метрической связности пространства, которая применяется Weyl'ем [2].

Обобщение геометрических идей Weyl'я прежде всего должно состоять в освобождении от той связи, которая налагается на параллельное перемещение контрагредиентного вектора в зависимости от параллельного перемещения когредиентного вектора. Представляется однако не безполезным освободившись от указанного стеснения классифицировать пространства таким путем полученные, при посредстве рас-

---

1/ См. Levi Civita, Nozione di parallelismo in una varietà qualunque etc., Rendic. del Circolo Matem. di Palermo, t. 42 (1917)

2/ Обобщением в известном направлении пространства Weyl'я занимается Eddington в своей статье напечатанной в Proceed. Lond. Roy. Soc. Vol. 1921.

смотрения геометрических объектов присоединенных к этим пространствам. Таким геометрическим объектом будет понятие о плоскости, соответственно обобщенное на кривое пространство n измерений. Указанная классификация позволит ~~опре~~выделить из рассматриваемых пространств, такие пространсвва, в которых Weyl'ево будет являться частным случаем.

Геометрическая причина формы метрической связности, которая применяется Weyl'ем, как будет ниже показано, заключается в том, что эта форма есть необходимое и достаточное условие, чтобы углы когредиентных векторов не менялись бы при параллельной перенесении означенных векторов. Ставя такое же требование для контрагредиентных векторов, мы сможем определить параметры обусловливающие паралельное перенесение как когредиентных, так и контрагредиентных векторов, с помощью фундаментального метрического тензора g_{ik}, с помощью двух /а не одного, как у Weyl'я/ контрагредиентных масштабных векторов и с помощью двух особых тензоров третьяго ранга. Останавливаясь на пространствах, в которых эти тензора третьяго ранга обращаются в нули или зависят от метрического тензора и обоих масштабных векторов, мы сможем определить свойства пространства помощью фундаментального метрического тензора и двух контрагредиентных масштабных векторов.

Для такого рода обобщенного пространства число координатных и масштабных инвариантов /в смысле Weyl'я/ (чем для пространства Weyl'я) будет значительно больше. Некоторые из них, аналогичные инвариантам Weyl'я, не трудно построить. При этом сам собой напрашивается вывод, - нельзя ли из свойств указанного более общего пространства получить уравнения Максвелла, без принятия теории Mie? В конце настоящей заметки я изложу некоторые соображения по этому вопросу. Однако я считаю необходимым здесь же отметить, что наличность еще одного контрагредиентного масштабного вектора должна с совершенной необходимостью приводить к системе уравнений дополнительной к уравнениям Максвелла; эта система уравнений должна, как кажется, являться своего рода обобщением теории *Mie*.

§ I.

I. Пусть многообразие n измерений M_n имеет переменными /координатами/ своими $x_1, x_2, \ldots x_n$; заменив помощью любого точечного преобразования эти координаты новыми $\bar{x}_1, \bar{x}_2, \ldots \bar{x}_n$, мы образуем многообразие $\overline{M}_n$, о котором мы будем говорить, что оно получено из M_n помощью точечного преобразования. Условимся в дальнейшем черточкой над какой либо величиной поставленной обозначать то, во что она перешла когда многообразие M_n перешло в $\overline{M}_n$.

Если для каждого из многообразий M_n переходящих друг в друга помощью точечных преобразований координат нам дана система n^3 функций этих координат $\Gamma^i_{\lambda\mu}$ преобразующихся по формуле:

$$(1)\qquad \overline{\Gamma}^i_{\lambda\mu} = \Gamma^\gamma_{\alpha\beta}\frac{\partial x_\alpha}{\partial \bar{x}_\lambda}\frac{\partial x_\beta}{\partial \bar{x}_\mu}\frac{\partial \bar{x}_i}{\partial x_\gamma} + \frac{\partial^2 x_\nu}{\partial \bar{x}_\lambda \partial \bar{x}_\mu}\cdot\frac{\partial \bar{x}_i}{\partial x_\nu},$$

то величины $\Gamma^i_{\lambda\mu}$ мы будем называть тензориальными параметрами.

Из формулы /I/ легко получить следующее соотношение:

$$(2)\qquad \frac{\partial^2 x_\nu}{\partial \bar{x}_\lambda \partial \bar{x}_\mu} = \overline{\Gamma}^\beta_{\lambda\mu}\frac{\partial x_\nu}{\partial \bar{x}_\beta} - \Gamma^\nu_{\alpha\beta}\frac{\partial x_\alpha}{\partial \bar{x}_\lambda}\frac{\partial x_\beta}{\partial \bar{x}_\mu}.$$

Пользуясь скобками Кристоффеля образованными помощью симметричного тензора g_{ik} будем иметь, что любые тензориальные параметры определяются по формуле:

$$(3)\qquad \Gamma^i_{\lambda\mu} = \left\{ {\lambda\mu \atop i} \right\} + A^i_{\lambda\mu},$$

где $A^i_{\lambda\mu}$ есть произвольный смешанный тензор третьяго ранга.

2. При изучении свойств тензориальных параметров большую роль играют два тензора соответственно третьяго и

четвертого ранга, определяемые равенствами:

$$(4) \qquad \gamma^i_{\lambda\mu} = \Gamma^i_{\lambda\mu} - \Gamma^i_{\mu\lambda},$$

$$(5) \qquad F^i_{\kappa\lambda\mu} = \frac{\partial \Gamma^i_{\kappa\lambda}}{\partial x_\mu} - \frac{\partial \Gamma^i_{\kappa\mu}}{\partial x_\lambda} + \Gamma^\sigma_{\kappa\lambda}\Gamma^i_{\sigma\mu} - \Gamma^\sigma_{\kappa\mu}\Gamma^i_{\sigma\lambda},$$

тензориальность этих выражений выводится из формулы /1/ и /2/ имеющих место для преобразования тензориальных параметров.

Первый из выведенных нами тензоров $\gamma^i_{\lambda\mu}$ для случае разбираемых Weyl'ем обращается тождественно в нуль; условимся называть этот тензор симметралом. Тензор $F^i_{\kappa\lambda\mu}$ носит названия кривизны тензориальных параметров. Если симметрал обращается в нуль, то тензориальные параметры будем называть симметричными.

Не трудно проверить, что кривизна тензориальных параметров удовлетворяет соотношению:

$$(6) \qquad F^i_{\kappa\lambda\mu} = -F^i_{\kappa\mu\lambda}.$$

Помощью композиции кривизны с фундаментальным тензором g_{ik} и с единичным тензором δ^k_i будем иметь следующие тензора и скаляры:

$$(7) \qquad \begin{aligned} F_{ik\ell m} &= g_{\sigma i} F^\sigma_{k\ell m}, \\ F_{ik} &= F^\sigma_{i\sigma k} = F^\sigma_{isk}\delta^s_\sigma = g^{\alpha\beta}F_{\alpha i\beta k}, \\ F &= g^{ik}F_{ik} = g^{ik}g^{\alpha\beta}F_{\alpha i\beta k}, \end{aligned}$$

условимся первый из этих тензоров называть Римановым тензором, второй - сокращенным Римановым тензором и третий - скалярной кривизной.

В случае когда $\Gamma^i_{\lambda\mu} = \left\{ {\lambda\mu \atop i} \right\}$, тензора и скаляры определенные равенствами /5/ и /7/ превращаются в обычные символы Римана или в тензора образованные из них путем сокращения.

3. Параллельное перемещение когредиентного вектора ξ^i определяется Weyl'ем следующим образом: Пусть будет задана кривая $K: x_s = x_s(t)$ и в некоторой ее точке $(t = t_0)$ пусть будет задан когредиентный вектор $\overset{0}{\xi}{}^i$, мы будем говорить, что этот вектор параллельно перемещается по кривой K если в любой ее точке он будет определен как решение системы линейных дифференциальных уравнений:

$$(8) \qquad \frac{d\xi^i}{dt} = -\Gamma^i_{rs}\xi^r\frac{dx_s}{dt},$$

при следующих начальных условиях:

$$t = t_0, \quad \xi^i = \overset{0}{\xi}{}^i,$$

причем Γ^i_{rs} будут тензориальными параметрами.

Не трудно видеть, что для многообразия M_n уравнения /8/ напишутся так:

$$\frac{d\bar{\xi}^i}{dt} = -\bar{\Gamma}^i_{rs}\bar{\xi}^r\frac{d\bar{x}_s}{dt},$$

т.е. сохранят свою форму.

Параллельное перемещение когредиентного вектора по замкнутой кривой, вообще говоря /при произвольных тензориальных параметрах Γ^i_{rs} / при возвращении точки этой кривой в исходную не переведет вектор в его исходное положение, - иначе говоря параллельное перемещение вектора будет зависеть от пути, по которому перемещение совершалось.

Weyl'ем была доказана теорема о том, что необходимым и достаточным условием независимости параллельного перемещения вектора от пути, по которому это перемещение происходит служит равенство нулю кривизны тензориальных параметров $\Gamma^i_{\lambda\mu}$.

Для симметричных тензориальных параметров только что высказанное условие дает возможность путем преобразования координат привести все тензориальные параметры к нулю для любых точек M_n. Для несимметричных параметров этого утверждать нельзя.

Обращаясь к контрагредиентным векторам мы определим параллельное перемещение их по кривой K следующим образом. Пусть в некоторой точке $(t = t_0)$ этой кривой нам будет задан контрагредиентный вектор $\overset{0}{\eta}_i$, будем говорить, что этот вектор параллельно перемещается вдоль по кривой K, если в любой точке этой кривой он будет определен, как решение системы линейных дифференциальных уравнений:

$$(9) \qquad \frac{d\eta_i}{dt} = G^r_{is}\,\eta_r\,\frac{dx_s}{dt},$$

при следующих начальных условиях:

$$t = t_0, \quad \eta_i = \overset{0}{\eta}_i$$

причем $G^i_{\lambda\mu}$ будут тензориальными параметрами. Условимся тензориальные параметры $\Gamma^i_{\lambda\mu}$ называть когредиентными, а параметры $G^i_{\lambda\mu}$ контрагредиентными тензориальными параметрами. В геометрии Weyl'я обе эти сорта параметров совпадают; в таком случае, как нетрудно видеть, выражение $\alpha = \xi^i\eta_i$ не будет меняться, коль скоро ξ^i и η_i будут параллельно перемещаться по одной и той же кривой; в самом деле простые вычисления дают:

$$\frac{d\alpha}{dt} = \xi^i\eta_r\frac{dx_s}{dt}\left(G^r_{is} - \Gamma^r_{is}\right),$$

откуда и следует наше заключение.

Мы однако не будем предполагать совпадающими оба эти сорта тензориальных параметров. Между ними будет ниже установлена, на основании геометрических соображений, некоторая связь являющаяся все же гораздо более общим предположением, нежели предположение Weyl'я.

Относительно параллельного перемещения контрагредиентных векторов можно сделать те же заключения, как и относительно параллельно перемещающихся когредиентных векторов. Необходимым и достаточным условием независимости параллельного перемещения контрагредиентного вектора от пути, по которому перемещение происходит служит равенство нулю кривизны контрагредиентных тензориальных параметров.

4. Совершенно ясно, что рассматривая пространство с точки зрения ко~~г~~гредиентных или контрагредиентных векторов образующих это пространство, присоединяя указанное выше понятие о параллельном перемещении и описывая пространство с помощью какого либо многообразия M_n мы определим векториальные его свойства помощью когредиентных и контрагредиентных тензориальных параметров. Это общее векториальное пространство допускает простую классификацию, как в отношении когредиентных, так и в отношении контрагредиентных векторов. Ограничимся классификаций лишь в отношении когредиентных векторов. Общее пространство распадается на два класса: несимметричное, когда симметр~~ия~~ал отлич~~на~~ от нуля и симметричное, когда симметр~~ия~~ал обращается в нуль. Симметричное пространство в свою очередь распадается на два класса: I/ общее симметричное, когда $\Gamma^i_{\lambda\mu} = \left\{ {\lambda\mu \atop i} \right\} + A^i_{\lambda\mu}$,
где $A^i_{\lambda\mu}$ тензор симметричный в нижних значках и отличный от нуля; 2/ Риманново, когда $\Gamma^i_{\lambda\mu} = \left\{ {\lambda\mu \atop i} \right\}$.
Среди общих симметричных пространств мы в дальнейшем выделим класс пространств, частным случаем которых явится пространство изученное Weyl'ем, - будем называть этот класс-пространствами Weyl'я. Среди Риманновых пространств выделим особый класс пространств, в котором все $\Gamma^i_{\lambda\mu}$ обращ~~ены~~аются в нуль, - эти пространства назовем Эвклидовыми имея в виду, что помощью точечного преобразования всегда можно подобрать ~~[illegible]~~ такое многообразие M_n описывающее пространство, при котором все g_{ik} будут величинами постоянными; в существе дела это конечно будут скорее псевдоэвклидовы, нежели эвклидовы пространства, имея в виду закон инерции квадратичных форм.

§ 2.

I. Перейдем теперь к установлению понятия о прямой и плоскости и к выяснению некоторых основных свойств этих геометрических образов.

Направление когредиентного или контрагредиентного вектора определяется $n-1$ отношениями его составляющих.

Два вектора имеющие одинаковое направление имеют очевидно своими составляющими величины отличающиеся на множитель, одинаковый для всех ~~соответствующих~~ составляющих. Так напр., если a^i и b^i два вектора имеющие одинаковое направление, то $a^i = \lambda b^i$, при всех i от I до n.

Будем говорить, что направление вектора ξ^i /или η_i/ параллельно перемещается по кривой K, если можно подобрать такую функцию точек этой кривой λ, чтобы вектор $\lambda \xi^i$ (или $\lambda \eta_i$) параллельно перемещался бы по кривой K.

Не трудно доказать, что необходимое и достаточное условие, чтобы направление когредиентного вектора ξ^i перемещалось бы параллельно по кривой K, заключается в независимости от значка i отношения:

$$\frac{\dfrac{d\xi^i}{dt} + \Gamma^i_{rs}\xi^r\dfrac{dx_s}{dt}}{\xi^i} = \lambda.$$

Точно также необходимое и достаточное условие, чтобы направление контраградиентного вектора η_i параллельно перемещалось бы по кривой K заключается в независимости от значка i отношения:

$$\frac{\dfrac{d\eta_i}{dt} - \Gamma^r_{is}\eta_r\dfrac{dx_s}{dt}}{\eta_i} = \mu.$$

2. Направлением касательной к кривой $x_i = x_i(t)$ в заданной точке назовем направление когредиентного вектора $\dfrac{dx_i}{dt}$.

Не трудно видеть, что направление касательной к кривой совершенно независимо от параметра помощью которого кривая выражена.

Прямой линией назовем кривую, направление касательной к коей параллельно перемещается вдоль по кривой.

Из предыдущего следует, что уравнения прямой сведется к следующей системе $n-1$ дифференциальных уравнений второго порядка:

$$\frac{\frac{d^2x_i}{dt^2} + \Gamma^i_{rs}\frac{dx_r}{dt}\frac{dx_s}{dt}}{\frac{dx_i}{dt}} = \lambda,$$

где λ неопределенная функция t.

Не трудно видеть, что всегда параметр t можно выбрать так, чтобы уравнение прямой было бы написано в форме:

$$(10) \qquad \frac{d^2x_i}{dt^2} + \Gamma^i_{rs}\frac{dx_r}{dt}\frac{dx_s}{dt} = 0$$

такого рода параметр t будем называть главным, он при определении прямой играет ту ~~же~~ роль как длина дуги для установления уравнения геодезической.

Ближайшее рассмотрение уравнения /10/ показывает, что через данную точку и с заданным направлением ~~на~~ касательной можно провести лишь одну прямую линию. В случае если наше пространство не принадлежит к Римановым пространствам, прямая линия не будет геодезической и лишь для Римановых пространств понятие о прямой и геодезической совпадут.

3. Установление понятия прямой линии было произведено нами помощью рассмотрения когредиентных векторов и их параллельного перемещения; установление понятия о плоских гиперповерхностях может быть произведено при помощи понятия о параллельном перемещении контрагредиентного вектора.

Назовем контрагредиентной нормалью к гиперповерхности $S: \; f(x_1, x_2, \dots x_n) = 0$, в заданной точке, контрагредиентный вектор:

$$f_i = \frac{\partial f}{\partial x_i},$$

в этой точке.

Для любой кривой лежащей на S' мы будем иметь:

$$f_i \frac{dx_i}{dt} = 0,$$

и обратно, если равенство

$$a_i \frac{dx_i}{dt} = 0$$

будет иметь место для любой кривой лежащей на S', то направление вектора a_i и направление контрагредиентной нормали к S' в рассматриваемой точке совпадут.

Плоскость в обычном Эвклидовом пространстве обладает тем свойством, что направление нормали к ней параллельно перемещается по любой кривой на плоскости расположенной.

Разыскивая гиперповерхности в общем пространстве обладающие тем свойством, что направление контрагредиентной нормали параллельно перемещается вдоль по всякой кривой на гиперповерхности лежащей, мы приходим к ряду весьма стеснительных ограничений налагаемых на кривизну когредиентных тензориальных параметров, ограничений делающих пространство весьма похожим на эвклидово, в котором кривизна когредиентных тензориальных параметров обращается в нуль. Мы за недостатком места не останавливаемся на этом вопросе.

Плоскость обычного эвклидового пространства обладает также следующим, более удобным для обобщения на случай общего пространства свойством.

Если из какой либо точки плоскости обычного эвклидового пространства провести пучек прямых, лежащих в плоскости, то направление нормали к плоскости параллельно перемещается вдоль по каждой из этих прямых.

Каждой точке пространства сопоставляется направление нормали и плоскость этому направлению перпендикулярная, в эвклидовом обычном пространстве плоскость проведенная для данной точки перпендикулярно к заданному направлению, будет, конечно плоскостью и для любой другой своей точки проведенной перпендикулярно к нормали в этой точке; обобщенное понятие плоской гиперповерхности этого свойства иметь не будет.

Прямой гиперповерхностью для данной точки $\mathcal{P}$ нормальной к контрагредиентному вектору $\overset{0}{f}_i$ назовем гиперповерхность образованную прямыми проходящими через эту точку и имеющую в точке $\mathcal{P}$ определенную контрагредиентную нормаль, направление которой совпадает с направлением вектора $\overset{0}{f}_i$.

Не трудно видеть, что прямая гиперповерхность для точки $\mathcal{P}$ нормальная к вектору $\overset{0}{f}_i$ всегда существует и определяется единственным образом.

Прямая гиперповерхность для точки $\mathcal{P}$ нормальная к вектору $\overset{0}{f}_i$ называется плоской гиперповерхностью отвечающей точке $\mathcal{P}$ и нормальной к вектору $\overset{0}{f}_i$, если контрагредиентная нормаль к этой прямой гиперповерхности параллельно перемещается вдоль по любой прямой проходящей через точку $\mathcal{P}$.

Совершенно ясно, что плоская гиперповерхность отвечающая точке $\mathcal{P}$ не будет плоской гиперповерхностью отвечающей какой либо другой точке лежащей на ней; этого рода свойством плоская гиперповерхность обладает лишь в исключительных случаях.

Пространство в котором всякая прямая гиперповерхность есть плоская гиперповерхность назовем векториально совершенным пространством.

3. Выясним условия налагаемые на когредиентные и контрагредиентные тензориальные параметры чтобы пространство было бы векториально совершенным.

Теорема. Необходимое и достаточное условие векториального совершенства пространства заключается в том, чтобы: 1/ контрагредиентные тензориальные параметры были бы симметричны, и 2/ чтобы выполнялись следующие соотношения:

$$
\begin{aligned}
& z^i_{rs} + z^i_{sr} = 0, \quad (i \text{ не } = r,\ i \text{ не } = s), \\
(11) \qquad & z^i_{ri} + z^i_{ir} = \omega_r, \text{ не зависит от } i, \quad (i \text{ не } = r), \\
& z^i_{ii} = \omega_i, \text{ [1]}
\end{aligned}
$$

где $z^i_{\lambda\mu} = G^i_{\lambda\mu} - \Gamma^i_{\lambda\mu}$.

[1] Суммирование по i, конечно, не производится.

Не трудно видеть, что r^i_{jp} есть смешанный тензор третьяго ранга, а ω_i является контрагредиентным вектором. Равенства /II/ могут быть написаны следующим образом:

$$(12) \qquad r^i_{rs} + r^i_{sr} = \delta^i_r \omega_s + \delta^i_s \omega_r .$$

Доказательству этой теоремы предпошлем две алгебраических леммы.

Лемма I. Если a_{rs} не зависит от ξ^i, если $a_{rs}\xi^r\xi^s = 0$ при всех ξ^i удовлетворяющих условию $f_i\xi^i = 0$, то:

$$(a) \qquad a_{rs} + a_{sr} = f_s \frac{a_{rr}}{f_r} + f_r \frac{a_{ss}}{f_s}.$$

Из условий леммы следует, что квадратичная форма $a_{rs}\xi^r\xi^s$ делится на линейную форму $f_i\xi^i$, т.е. имеет место тождество:

$$a_{rs}\xi^r\xi^s = (f_i\xi^i)(\lambda_j\xi^j),$$

сравнивая коэффициенты при $\xi^r\xi^s$ в обоих частях этого тождества докажем лемму.

Лемма 2. Если a^i_{rs} не зависит от f_i и ξ^i, если $a^i_{rs}f_i\xi^r\xi^s = 0$, при всех f_i и ξ^i удовлетворяющих условию $f_i\xi^i = 0$, то a^i_{rs} удовлетворяют соотношению:

$$(b) \qquad a^i_{rs} + a^i_{sr} = \delta^i_r \omega_s + \delta^i_s \omega_r ,$$

где $\omega_r = a^r_{rr}$.

Пользуясь формулой /a/ леммы I будем при всех f_i иметь следующее равенство:

$$a^i_{rs}f_i + a^i_{sr}f_i = f_s \frac{a^i_{rr}f_i}{f_r} + f_r \frac{a^i_{ss}f_i}{f_s},$$

освобождаясь от знаменателя найдем:

$$(a^i_{rs} + a^i_{sr})f_i f_s f_r = f_s^2 f_i a^i_{rr} + f_r^2 f_i a^i_{ss},^{1)}$$

? сравнивая коэффициенты при различных произведениях $f_i f_s f_r$ докажем нашу лемму.

---

1) Суммирование производится только по i.

Приступим теперь к доказательству необходимости условий нашей теоремы. Пусть $f(x_1, x_2, \dots x_n) = 0$ будет плоской гиперповерхностью для точки P, пусть $f_i = \frac{\partial f}{\partial x_i}$, а $\xi^s = \frac{dx_s}{dt}$, если $x_s = x_s(t)$ есть уравнение одной из прямых проходящих через P и лежащих на нашей плоской гиперповерхности. Для каждой из этих прямых, мы будем иметь:

$$f_i \xi^i = 0,$$

выбирая за t главный параметр какой либо прямой, дифференцируя предыдущее равенство по t и помня, что для прямой:

$$\frac{d\xi^i}{dt} = -\Gamma^i_{rs} \xi^r \xi^s,$$

получим следующее соотношение:

$$(c) \qquad \xi^r \left(\frac{df_r}{dt} - \Gamma^i_{rs} f_i \xi^s \right) = 0.$$

В тоже время помня, что по свойству плоской гиперповерхности направление нормали к ней перемещается, параллельно вдоль по прямой плоскости эту образующей найдем следующее соотношение:

$$(d) \qquad \frac{df_r}{dt} - G^i_{rs} f_i \xi^s = \omega' f_r,$$

помножая это равенство на ξ^r, суммируя по r от I до n и вычитая полученный результат из равенства /c/ найдем:

$$\tau^i_{rs} f_i \xi^r \xi^s = 0,$$

каковое равенство имеет место для векториально совершенного пространства, при всех f_i, ξ^i удовлетворяющих условию $f_i \xi^i = 0$; простое применение леммы 2 даст нам вторые условия теоремы.

Для получения первых условий заметим, что $\frac{df_r}{dt} = \frac{\partial f_r}{\partial x_s} \xi^s$, тогда без труда получим из равенства /d/ следующее равенство:

$$\left(\frac{\partial f_r}{\partial x_s} - G^i_{rs} f_i\right)\xi^s = \omega' f_r,$$

помножая это равенство на ξ^r, суммируя по r от I до n и обозначая через a_{rs} выражение $\frac{\partial f_r}{\partial x_s} - G^i_{rs} f_i$ найдем:

$$a_{rs}\xi^r\xi^s = 0,$$

при $f_i\xi^i = 0$. Отсюда пользуясь леммой I найдем:

$$a_{rs} + a_{sr} = f_s\frac{a_{rr}}{f_r} + f_r\frac{a_{ss}}{f_s},$$

помножая на ξ^s полученное равенство и суммируя по s от I до n найдем:

$$a_{rs}\xi^s + a_{sr}\xi^s = f_r\sum_{s=1}^{n}\frac{a_{ss}}{f_s}\xi^s = \omega'' f_r$$

? где ω'' не зависит от r. По определению a_{sr} имеем:

$$a_{sr} = a_{rs} + (G^i_{rs} - G^i_{sr})f_i,$$

поэтому предыдущее равенство напишется так:

$$2a_{rs}\xi^s + (G^i_{rs} - G^i_{sr})f_i\xi^s = \omega'' f_r,$$

но $a_{rs}\xi^s = \omega' f_r$, поэтому:

$$(G^i_{rs} - G^i_{sr})\xi^s f_i = \omega f_r, \quad \omega = \omega'' - 2\omega',$$

из этого равенства найдем :

$$\frac{(G^i_{rs} - G^i_{sr})\xi^s f_i}{f_r} = \frac{(G^i_{\alpha s} - G^i_{s\alpha})\xi^s f_i}{f_\alpha},$$

освобождаясь от знаменателя и сравнивая коэффициент при некоторых произведениях $f_i f_\beta$ найдем:

$$(G^i_{rs} - G^i_{sr})\xi^s = 0, \quad i \text{ не} = r$$

? т.к. эти равенства имеют место при всех ξ^i удовлетворяющих соотношению $f_i\xi^i = 0$, и т.к. $G^i_{rs} - G^i_{sr}$ от f_i не зависят, то:

$$G^i_{rs} - G^i_{sr} = 0, \quad i \text{ не} = r,$$

полагая $i = s$ найдем:

$$G^s_{rs} - G^s_{sr} = 0,$$

каковые равенства и докажут симметричность контрагредиентных тензориальных параметров.

Докажем теперь достаточность (voldoendheid) нашей теоремы.

Из условия $f_i \xi^i = 0$ для $\xi^i = \frac{dx_i}{dt}$, где t главный параметр прямо и лежащей на ~~кривой~~ прямой гиперповерхности $f=0$ и проходящей через точку P, будем иметь:

$$\frac{df_i \xi^i}{dt} = 0,$$

или

$$\xi^r \left(\frac{df_r}{dt} - \Gamma^i_{rs} f_i \xi^s\right) = 0,$$

помня, что $\Gamma^i_{rs} = G^i_{rs} - \tau^i_{rs}$, найдем:

$$\xi^r \left(\frac{df_r}{dt} - G^i_{rs} f_i \xi^s\right) + \tau^i_{rs} f_i \xi^r \xi^s = 0,$$

но в силу условий нашей теоремы имеем:

$$\tau^i_{rs} f_i \xi^r \xi^s = \frac{1}{2}\left(\tau^i_{rs} + \tau^i_{sr}\right) f_i \xi^r \xi^s - \frac{1}{2}\left(\delta^i_r \omega_s + \delta^i_s \omega_r\right) f_i \xi^r \xi^s = 0,$$

ибо $f_r \xi^r = 0$; т.о.:

$$(c) \qquad \xi^r \left(\frac{df_r}{dt} - G^i_{rs} f_i \xi^s\right) = a_{rs} \xi^r \xi^s = 0,$$

причем $a_{rs} = \frac{\partial f_r}{\partial x_s} - G^i_{rs} f_i$, опять таки в силу условий нашей теоремы, симметрично в нижних значках:

$$a_{rs} = a_{sr}.$$

Помня, что равенство / c / имеет место при всех ξ^i удовлетворяющих условию $f_i \xi^i = 0$ и применяя лемму I найдем:

$$a_{rs} + a_{sr} = 2a_{rs} = f_s \frac{a_{rr}}{f_r} + f_r \frac{a_{ss}}{f_s},$$

помножая это равенство на ξ^s и суммируя по s от I до n получим следующее соотношение:

$$a_{rs} \xi^s = f_r \cdot \frac{1}{2} \sum_{s=1}^{n} \frac{a_{ss}}{f_s} \xi^s,$$

иначе говоря:

$$a_{rs} \xi^s = \frac{df_r}{dt} - G^i_{rs} f_i \xi^s = \mu f_r,$$

т.е. контрагредиентная нормаль к нашей прямой гиперповерхности действительно параллельно перемещается вдоль по прямым проходящим через точку P и лежащим на нашей гиперsiehe pag 14 unten

поверхности; следовательно рассматриваемая прямая гиперповерхность есть плоская гиперповерхность и достаточность условий теоремы т.о. доказана. Непосредственно из формул /12/ и из симметрии контрагредиентных параметров получается следующее выражение их через когредиентные параметры:

$$(13) \qquad G^{i}_{\lambda\mu} = \frac{\Gamma^{i}_{\lambda\mu} + \Gamma^{i}_{\mu\lambda}}{2} + \frac{1}{2}\delta^{i}_{\lambda}\omega_{\mu} + \frac{1}{2}\delta^{i}_{\mu}\omega_{\lambda},$$

где ω_λ есть любой контрагредиентный вектор.

В случае симметрии когредиентных тензориальных параметров формула /13/ дает следующее равенство:

$$(14) \qquad G^{i}_{\lambda\mu} = \Gamma^{i}_{\lambda\mu} + \frac{1}{2}\delta^{i}_{\lambda}\omega_{\mu} + \frac{1}{2}\delta^{i}_{\mu}\omega_{\lambda}.$$

Пространства рассматриваемые Weyl'ем ($G^{i}_{\lambda\mu} = \Gamma^{i}_{\lambda\mu}$) получаются в случае когда $\omega_\lambda = 0$. Такого рода пространства где $\omega_\lambda = 0$, а $\Gamma^{i}_{\lambda\mu}$ симметричны, условимся называть главными векториально совершенными пространствами. Вектор ω_i условимся называть характеристическим вектором.

Рассмотрение плоских гиперповерхностей приводит нас т.о. к вполне естественному введению контрагредиентного вектора ω_i отличного от масштабного вектора Weyl'я; мы получаем таким образом указание на то, что свойства пространства помимо метрического тензора g_{ik} и масштабного вектора φ_i, определяются еще одним вектором ω_i; если свойства пространства выражаются в уравнениях тяготения и электродинамики, то возможно, что этот новый вектор может быть истолкован, как один из двух векторов входящих в уравнения электродинамики.

§ 3.

I. Переходя к метрическим свойствам пространства введем следующие обозначения:

Мерой когредиентного вектора ξ^i будем согласно определению Weyl'я называть следующий скаляр:

$$(15) \qquad l = l(\xi^i) = g_{ik}\xi^i\xi^k,$$

где g_{ik} - фундаментальный тензор.

Мерой контрагредиентного вектора η_i назовем скаляр образованный следующим образом:

$$(16) \qquad L = L(\eta_i) = g^{ik}\eta_i\eta_k,$$

причем g^{ik} есть тензор сопряженный фундаментальному тензору g_{ik}.

Нашей ближайшей задачей будет исследование изменения меры когредиентного и контрагредиентного вектора, когда эти вектора параллельно перемещаются по некоторой кривой K.

Weyl, как мы уже говорили выше, рассматривает лишь такие типы метрических пространств, в которых мера когредиентного вектора при параллельном перемещении сего вектора вдоль по кривой $x_i = x_i(t)$ изменяется по следующему закону:

$$\frac{dl}{dt} = -\varphi_s\, l\, \frac{dx_s}{dt},$$

где φ_s заданный контрагредиентный вектор. Как мы сейчас выясним, что только написанная формула имеет теснейшую связь с законом изменения углов при параллельном перемещении векторов эти углы образующих.

Углом ω двух когредиентных векторов ξ^i, η^i называется величина определяемая из условия:

$$(17) \qquad \cos\omega = \frac{\Delta(\xi^i, \eta^i)}{\sqrt{l(\xi^i)}\,\sqrt{l(\eta^i)}},$$

где $\Delta(\xi^i, \eta^i)$ определяется равенством:

$$(18) \qquad \Delta(\xi^i, \eta^i) = g_{ik}\xi^i\eta^k.$$

Углом Ω двух контрагредиентных векторов ξ_i, η_i называется величина определяемая из условия:

$$(19) \qquad \cos\Omega = \frac{\nabla(\xi_i, \eta_i)}{\sqrt{L(\xi_i)}\,\sqrt{L(\eta_i)}},$$

где $\nabla(\xi_i, \eta_i)$ определяется равенством:

$$(20) \qquad \nabla(\xi_i, \eta_i) = g^{ik}\xi_i\eta_k \;{}^{1)}$$

I/ Мы не останавливаемся здесь на дополнительных условиях делающих вполне определенными значения ω и Ω получаемые из формул /17/ и /19/.

О внутренней связи формул /15/ и /17/ мы здесь говорить не будем; эта связь выясняется на основании соображений изложенных напр. у Bianchi в Lezioni di Geometria Differenziale, t. I, p. 332.

2. Выясним как изменяются меры векторов и углы, когда вектора параллельно перемещаются по заданной кривой. После несложных вычислений будем иметь следующие равенства:

$$
(21)\qquad
\begin{aligned}
\frac{d\Delta}{dt} &= A_{iks}\frac{dx_s}{dt}\xi^i\eta^k,\\
\frac{dl}{dt} &= A_{iks}\frac{dx_s}{dt}\xi^i\xi^k,\\
\frac{d\nabla}{dt} &= B_s^{ik}\frac{dx_s}{dt}\xi_i\eta_k,\\
\frac{dL}{dt} &= B_s^{ik}\frac{dx_s}{dt}\xi_i\xi_k,
\end{aligned}
$$

где тензора A_{iks} и B_s^{ik} определяются формулами:

$$(22)\qquad A_{iks} = \frac{\partial g_{ik}}{\partial x_s} - g_{\alpha k}\Gamma^{\alpha}_{is} - g_{i\alpha}\Gamma^{\alpha}_{ks},$$

$$(23)\qquad B_s^{ik} = \frac{\partial g^{ik}}{\partial x_s} + g^{\alpha k}G^{i}_{\alpha s} + g^{i\alpha}G^{k}_{\alpha s},$$

иначе говоря A_{iks} есть тензориальная производная g_{ik} образованная помощью тензориальных параметров $\Gamma^i_{\lambda\mu}$, а B_s^{ik} есть тензориальная производная g^{ik} образованная помощью тензориальных параметров $G^i_{\lambda\mu}$.

Пользуясь предыдущими формулами найдем:

$$
(24)\qquad
\begin{aligned}
\frac{d\cos\omega}{dt} &= \frac{1}{\sqrt{l_1}\sqrt{l_2}}\left(A_{iks}\xi^i\eta^k - \frac{1}{2}\frac{\Delta}{l_1}A_{pqs}\xi^p\xi^q - \frac{1}{2}\frac{\Delta}{l_2}A_{pqs}\eta^p\eta^q\right)\frac{dx_s}{dt},\\
\frac{d\cos\Omega}{dt} &= \frac{1}{\sqrt{L_1}\sqrt{L_2}}\left(B_s^{ik}\xi_i\eta_k - \frac{1}{2}\frac{\nabla}{L_1}B_s^{pq}\xi_p\xi_q - \frac{1}{2}\frac{\nabla}{L_2}B_s^{pq}\eta_p\eta_q\right)\frac{dx_s}{dt},
\end{aligned}
$$

где для краткости положено:

$$l_1 = l(\xi^i),\quad l_2 = l(\eta^i),\quad L_1 = L(\xi_i),\quad L_2 = L(\eta_i),\quad \Delta = \Delta(\xi^i\eta^i),\quad \nabla = \nabla(\xi_i\eta_i),$$

причем ξ^i, η^i и ξ_i, η_i друг с другом никакими соотношениями не связаны.

3. Пространство в котором углы как двух когредиентных, так и двух контрагредиентных векторов не меняются при пара-

ллельном перемещении означенных векторов назовем пространством $Weyl$'я; можно было бы отдельно рассмотреть пространства обладающие указанным свойством только для когредиентных, или только для контрагредиентных векторов, - мы однако этого делать не будем за недостатком места.

Следующее предложение установит основное свойство пространства $Weyl$'я.

Теорема. Для того чтобы пространство было бы пространством $Weyl$'я необходимо и достаточно, чтобы отношения $\frac{A_{iks}}{g_{ik}}$ и $\frac{B^{ik}_s}{g^{ik}}$ не зависели бы от значков i, k.

Для доказательства необходимости условий теоремы рассмотрим параллельное перемещение ортогональных когредиентных векторов, т.е. таких векторов, у коих $\cos\omega = 0$ или $\Delta(\xi^i, \eta^i) = 0$. Для пространства $Weyl$'я будем иметь $\frac{d\Delta}{dt} = 0$, или, пользуясь формулой /24/ и тем, что $\Delta = 0$ найдем следующее равенство:

$$A_{iks}\frac{dx_s}{dt}\xi^i\eta^k = 0,$$

при условии, что ξ^i, η^i удовлетворяют соотношению:

$$g_{ik}\xi^i\eta^k = 0.$$

из только что написанных равенств будет следовать:

$$\frac{A_{iks}}{g_{ik}}\cdot\frac{dx_s}{dt} = \frac{A_{ems}}{g_{em}}\cdot\frac{dx_s}{dt},$$

каковое равенство справедливое при всех $\frac{dx_s}{dt}$ докажет необходимость условий теоремы по отношению к когредиентным векторам.

Совершенно также докажем необходимость условий теоремы и по отношению к контрагредиентным векторам.

Достаточность условий теоремы проверяется непосредственно пользуясь формулами /24/.

Назовем отношения $\frac{A_{iks}}{g_{ik}}$ и $\frac{B^{ik}_s}{g^{ik}}$ через $-\varphi_s$ и $-f_s$, тогда будем иметь:

$$(25) \qquad A_{iks} = -\varphi_s g_{ik}, \quad B^{ik}_s = -f_s g^{ik},$$

причем φ_s и f_s будут контрагредиентными векторами.

Пользуясь формулами /21/ и /25/ найдем:

$$(26) \qquad \frac{dl}{dt} = -\varphi_s\frac{dx_s}{dt}l, \quad \frac{dL}{dt} = -f_s\frac{dx_s}{dt}L,$$

т.е. φ_s и f_s будут контрагредиентными векторами характеризирующими изменения меры векторов, коль скоро эти последние параллельно перемещаются вдоль по некоторой кривой. Назовем эти вектора первым и вторым масштабными векторами. Связь между ними имеет место для векториально совершенных пространств, о чем будет сказано ниже.

4. Тензора φ_{ik} и f_{ik} определяемые равенствами:

$$\varphi_{ik} = \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_k} - \frac{\partial \varphi_k}{\partial x_i},$$
$$f_{ik} = \frac{\partial f_i}{\partial x_k} - \frac{\partial f_k}{\partial x_i} \tag{27}$$

назовем первой и второй метрической кривизной пространства. Легко видеть, что необходимым и достаточным условием независимости изменения меры когредиентного или контрагредиентного вектора от пути, по которому вектор параллельно перемещается, служит обращение в нуль соответственно первой или второй метрической кривизны пространства.

Будем говорить, что мы изменяем масштаб, если все g_{ik} помножаем на $\lambda = \lambda(x_1, x_2, \ldots x_n)$. В этом случае мера когредиентного вектора будет умножена на λ, а мера контрагредиентного вектора будет умножена на $\frac{1}{\lambda}$, ибо все g^{ik} приобретут множителем величину $\frac{1}{\lambda}$. Первый масштабный вектор φ_s превратится в вектор $\varphi_s - \frac{\partial \lg \lambda}{\partial x_s}$, а второй масштабный вектор f_s превратится в вектор $f_s + \frac{\partial \lg \lambda}{\partial x_s}$; что же касается первой и второй метрической кривизны, то они не изменятся.

Условимся выражение, в которое переходит величина A когда мы изменяем масштаб обозначать, ставя под величиной значок $\sim$. Величины не меняющиеся при изменении масштаба будем называть, согласно терминологии Weyl'a масштабными инвариантами, оставя за инвариантом в обычном смысле этого слова название координатных инвариантов.

Т.к. в дальнейшем нам нужно будет построить масштабные инварианты, то нам необходимо будет выяснить, как меняются те или иные выражения при изменении масштаба. Легко составить следующие формулы:

$$\tilde{g}_{ik} = \lambda g_{ik}, \quad \tilde{g}^{ik} = \frac{1}{\lambda} g^{ik}, \quad \tilde{g} = \lambda^n g,$$

$$\tilde{R} = \frac{1}{\lambda} R + \frac{n-1}{\lambda} \mathcal{D}\psi + \frac{(n-1)(n-2)}{4\lambda} \Delta\psi, \tag{28}$$

где $\mathcal{D}\psi$ и $\Delta\psi$ определяются равенствами:

$$\mathcal{D}\psi = \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial x_\beta}\left(\sqrt{g}\, g^{\alpha\beta} \frac{\partial \psi}{\partial x_\alpha}\right),$$

$$\Delta\psi = g^{\alpha\beta} \frac{\partial \psi}{\partial x_\alpha} \frac{\partial \psi}{\partial x_\beta}, \tag{29}$$

$$\psi = \lg \lambda,$$

а R есть скалярная кривизна образованная для тензориальных параметров $\Gamma^i_{\lambda\mu} = \left\{ {\lambda\mu \atop i} \right\}$: $R = g^{ik} g^{\alpha\beta} (i\alpha, \beta k)$.
Точно также не трудно видеть, что имеют место следующие равенства:

$$\tilde{\varphi}_i = \varphi_i - \frac{\partial \psi}{\partial x_i}, \quad \tilde{f}_i = f_i + \frac{\partial \psi}{\partial x_i},$$

$$\tilde{\varphi}_{ik} = \varphi_{ik}, \quad \tilde{f}_{ik} = f_{ik}. \tag{30}$$

§ 4.

I. Перейдем теперь к определению тензориальных параметров для пространств Weyl'я. Начнем с когредиентных тензориальных параметров $\Gamma^i_{\lambda\mu}$; они должны определяться из уравнений /25/, т.е. из равенств

$$\frac{\partial g_{ik}}{\partial x_s} + \varphi_s g_{ik} = g_{\alpha k} \Gamma^\alpha_{is} + g_{\alpha i} \Gamma^\alpha_{ks}. \tag{31}$$

Если $\Gamma^i_{\lambda\mu}$ симметричные параметры, то из уравнений /31/ Weyl находит следующие выражения для $\Gamma^i_{\lambda\mu}$:

$$\Gamma^i_{\lambda\mu} = \Lambda^i_{\lambda\mu} = \left\{ {\lambda\mu \atop i} \right\} + \frac{1}{2}\varphi_\lambda \delta^i_\mu + \frac{1}{2}\varphi_\mu \delta^i_\lambda - \frac{1}{2} g_{\lambda\mu} \varphi^i, \tag{32}$$

где φ^i определяется равенством:

$$\varphi^i = g^{\sigma i} \varphi_\sigma. \tag{33}$$

Покажем, что общее решение уравнений /31/ определяется формулой:

$$\Gamma^i_{\lambda\mu} = \Lambda^i_{\lambda\mu} + a^i_{\lambda\mu} - g_{\alpha\lambda} g^{\sigma i} a^\alpha_{\sigma\mu} - g_{\alpha\mu} g^{\sigma i} a^\alpha_{\sigma\lambda}, \tag{34}$$

где $a^i_{\lambda\mu}$ произвольный тензор кососимметричный в нижних значках. Из формулы /34/ следует, что в случае симметрии тензориальных параметров $a^i_{\lambda\mu} = a^i_{\mu\lambda}$ и обращается следовательно в нуль: $a^i_{\lambda\mu} = 0$.

Непосредственным вычислением можно проверить, что $\Gamma^i_{\lambda\mu}$ определяемое формулой /34/ удовлетворяет соотношению /31/, если принять во внимание, что $a^i_{\lambda\mu} = -a^i_{\mu\lambda}$. Выясним, что всякое решение уравнения /31/ может быть представлено в форме /34/. Из уравнений /31/ без труда найдем.

$$\left[\begin{matrix}\lambda\mu\\ i\end{matrix}\right] + \frac{1}{2}\varphi_\mu g_{\lambda i} + \frac{1}{2}\varphi_\lambda g_{\mu i} - \frac{1}{2}\varphi_i g_{\lambda\mu} = g_{\alpha i}\Gamma^\alpha_{\lambda\mu} - \frac{1}{2} g_{\alpha i}\gamma^\alpha_{\lambda\mu} - \frac{1}{2} g_{\alpha\lambda}\gamma^\alpha_{\mu i} - \frac{1}{2} g_{\alpha\mu}\gamma^\alpha_{\lambda i},$$

где $\gamma^i_{\lambda\mu} = \Gamma^i_{\lambda\mu} - \Gamma^i_{\mu\lambda}$.

Заменяя в этом равенстве i на σ помножая обе части его на $g^{i\sigma}$ и суммируя по σ от I до n, получим

$$\Gamma^i_{\lambda\mu} = \Lambda^i_{\lambda\mu} + \frac{1}{2}\gamma^i_{\lambda\mu} - \frac{1}{2} g_{\alpha\lambda} g^{\sigma i}\gamma^\alpha_{\sigma\mu} - \frac{1}{2} g_{\alpha\mu} g^{\sigma i}\gamma^\alpha_{\sigma\lambda},$$

иначе говоря формулу /34/ в которой $a^i_{\lambda\mu}$ заменено на тензор $\frac{1}{2}\gamma^i_{\lambda\mu}$, по определению своему кососимметричный.

Из формулы /34/ не трудно заключить, что когредиентные тензориальные параметры пространства Weyl'я определяются метрическим тензором g_{ik}, масштабным вектором φ_i и кососимметричным в нижних значках тензором $a^i_{\lambda\mu}$, т.е. для определения своего требуют знания $\frac{n(n+1)}{2} + n + \frac{n^2(n-1)}{2}$ функций координат. Если тензориальные параметры симметричны, то определение их требует знания $\frac{n(n+1)}{2} + n$ функций.

2. Определим теперь для пространства Weyl'я контрагредиентные тензориальные параметры. Согласно формуле /25/ определение их может быть получено решением уравнений:

$$(35)\qquad \frac{\partial g^{ik}}{\partial x_s} + \varphi_s g^{ik} = -g^{\alpha k} G^i_{\alpha s} - g^{\alpha i} G^k_{\alpha s}.$$

Покажем, что общее решение уравнений /35/ определится следующей формулой:

$$(36) \qquad G^i_{\lambda\mu} = \Gamma^i_{\lambda\mu} + \delta^i_\lambda \psi_\mu + g^{i\sigma} b_{\sigma\lambda\mu},$$

где контрагредиентный вектор ψ_μ определяется формулой:

$$\psi_\mu = -\frac{\varphi_\mu + f_\mu}{2},$$

а тензор $b_{\sigma\lambda\mu}$ кососимметричен в первых двух значках.

Помножая обе части формулы /35/ на $g_{\kappa l} g_{im}$, суммируя по i и κ от I до n и складывая полученный результат с формулой /31/, где i и κ заменены на l и m, найдем следующее соотношение:

$$g_{im} g_{\kappa l} \frac{\partial g^{i\kappa}}{\partial x_s} + \frac{\partial g_{lm}}{\partial x_s} + (\varphi_s + f_s) g_{lm} = -g_{\alpha m} \tau^\alpha_{ls} - g_{\alpha l} \tau^\alpha_{ms}$$

где $\tau^i_{\lambda\mu} = G^i_{\lambda\mu} - \Gamma^i_{\lambda\mu}$.

Непосредственное вычисление дает:

$$g_{im} g_{\kappa l} \frac{\partial g^{i\kappa}}{\partial x_s} + \frac{\partial g_{lm}}{\partial x_s} = 0,$$

поэтому предыдущая формула перепишется так:

$$2\psi_s g_{lm} = g_{\alpha m} \tau^\alpha_{ls} + g_{\alpha l} \tau^\alpha_{ms},$$

полагая:

$$\tau^i_{\lambda\mu} = \delta^i_\lambda \psi_\mu + \vartheta^i_{\lambda\mu},$$

найдем:

$$g_{\alpha m} \vartheta^\alpha_{ls} + g_{\alpha l} \vartheta^\alpha_{ms} = 0,$$

вводя тензор:

$$g_{\alpha m} \vartheta^\alpha_{ls} = b_{mls}, \quad \vartheta^i_{ls} = g^{\sigma i} b_{\sigma ls},$$

из предыдущей формулы обнаружим кососимметричность его в первых двух значках, а ~~также~~ так как $\tau^i_{\lambda\mu} = \delta^i_\lambda \psi_\mu + g^{\sigma i} b_{\sigma\lambda\mu}$ (уравнения /35/) то мы получаем результат, что всякое решение представляется в виде формулы /36/.

Непосредственное простое вычисление дает нам, что $G^i_{\lambda\mu}$ определяемые формулой /36/ будут решением уравнений /35/.

Т.о. в общем случае пространства Weyl'я для определения контрагредиентных тензориальных параметров понадобится, кроме величин определяющих когредиентные параметры знание еще второго масштабного вектора f_i и кососимметричного в первых двух значках тензора $b_{\sigma\lambda\mu}$, всего следовательно дополнительно потребуется задание $n + \frac{n^2(n-1)}{2}$ функций координат.

3. Выясним теперь какие ограничения на введенные нами вектора и тензора определяющие для пространства Weyl'я тензориальные параметры, т.е. параллельное перемещениев векторов, налагает векториальное совершенство пространства.

Докажем следующую теорему:

Теорема. Если пространство Weyl'я есть пространство векториально совершенное, то полусумма первого и второго масштабного вектора равняется характеристическому вектору с обратным знаком:

$$\omega_i = \psi_i = -\frac{\varphi_i + f_i}{2}.$$

Согласно формулам преднидущего пункта имеем:

$$\Gamma^i_{\lambda\mu} = \delta^i_\lambda \psi_\mu + g^{i\sigma} b_{\sigma\lambda\mu},$$

но по условию векториального совершенства пространства будем иметь:

$$\Gamma^i_{\lambda\mu} + \Gamma^i_{\mu\lambda} = \delta^i_\lambda \omega_\mu + \delta^i_\mu \omega_\lambda,$$

откуда без труда найдем:

$$b_{\kappa\lambda\mu} + b_{\kappa\mu\lambda} = g_{\lambda\kappa}\chi_\mu + g_{\mu\kappa}\chi_\lambda,$$

$$b_{\lambda\kappa\mu} + b_{\lambda\mu\kappa} = g_{\kappa\lambda}\chi_\mu + g_{\mu\lambda}\chi_\kappa,$$

$$b_{\mu\kappa\lambda} + b_{\mu\lambda\kappa} = g_{\kappa\mu}\chi_\lambda + g_{\lambda\mu}\chi_\kappa,$$

где $\chi_i = \omega_i - \psi_i$.

Складывая полученные формулы и помня, что $b_{\sigma\lambda\mu}$ кососимметричен в первых двух значках найдем:

$$g_{\kappa\lambda}\chi_\mu + g_{\mu\kappa}\chi_\lambda + g_{\lambda\mu}\chi_\kappa = 0$$

помножая это равенство на $g^{\mu s} g^{\lambda\sigma}$, суммируя по μ и λ от I до n и считая s, σ отличными от κ, найдем:

$$\chi_\kappa = 0,$$

ч. и т.д.

Теорема. Если векториально совершенное пространство Weyl's обладает симметричными когредиентными параметрами то оно есть главное векториально совершенное пространство.

Иначе говоря для такого пространства $\omega_i = \varphi_i = 0$,

т.е. $\varphi_i = -f_i$.

Т.к. $\Gamma^i_{\lambda\mu} = \Gamma^i_{\mu\lambda}$, а пространство векториально совершенно, то $\gamma^i_{\lambda\mu} = \gamma^i_{\mu\lambda}$, поэтому:

$$\gamma^i_{\lambda\mu} = \frac{1}{2}\delta^i_\mu \omega_\lambda + \frac{1}{2}\delta^i_\lambda \omega_\mu .$$

Отсюда определяя $\vartheta^i_{\lambda\mu}$, а также b_{mls} получим следующее равенство:

$$b_{mls} = \frac{1}{2} g_{sm}\omega_l - \frac{1}{2} g_{lm}\omega_s$$

Пользуясь тем, что b_{mls} кососимметричен в двух первых значках, без труда докажем теорему.

Можно было бы думать, что для пространств Weyl's в случае несимметричных тензориальных параметров тензора третьего ранга $b_{\sigma\lambda\mu}$ имеют весьма частный вид; ближайшее рассмотрение вопроса, на котором мы не останавливаемся, показывает, что это не имеет места.

Т.о. если пространство Weyl'я обладает векториальным совершенством, то тензориальные параметры его определяются при помощи метрического фундаментального тензора при помощи первого и второго масштабного вектора и при помощи тензора $a^i_{\lambda\mu}$ кососимметричного в нижних значках; иначе говоря для определения векториально совершенного пространства Weyl's необходимо знание $\frac{n(n+1)}{2} + 2n + \frac{n^2(n-1)}{2}$ функций координат. В дальнейшем мы будем рассматривать лишь такие векториально совершенные пространства Weyl'я, для которых тензора $a^i_{\lambda\mu}$ выражаются через масштабные вектора, иначе говоря будем предполагать, что пространство определяется знанием метрического тензора и двух масштабных векторов.

§ 5.

I. Из метрического тензора и из обоих масштабных векторов мы можем образовать ряд координатных инвариантов. Из составляющих метрического тензора, их первых и вторых производных легко образовать скалярную кривизну в смысле Римана R. Из масштабных векторов можно образовать следующие инварианты:

$$(37)\qquad \varphi = g^{ik}\varphi_i\varphi_k,\quad f = g^{ik}f_i f_k,\quad \mu = g^{ik}\varphi_i f_k.$$

Образуя с помощью скобок Кристоффеля тензориальные производные векторов φ_i и f_i и обозначая их через φ'_{ik} и f'_{ik} найдем следующие равенства:

$$\varphi'_{ik} = \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_k} - \varphi_\sigma \left\{ {ik \atop \sigma} \right\},\quad f'_{ik} = \frac{\partial f_i}{\partial x_k} - f_\sigma \left\{ {ik \atop \sigma} \right\},$$

с помощью этих равенств, а также с помощью метрических кривизн φ_{ik} и f_{ik} можно образовать следующие инварианты, содержащие масштабные вектора, их первые производные, метрический тензор и его первые производные:

$$(38)\qquad \Phi = g^{ik}\varphi'_{ik} = \frac{1}{\sqrt{g}}\frac{\partial(\sqrt{g}\,g^{\sigma k}\varphi_\sigma)}{\partial x_k},\qquad F = g^{ik}f'_{ik} = \frac{1}{\sqrt{g}}\frac{\partial(\sqrt{g}\,g^{\sigma k}f_\sigma)}{\partial x_k},$$

$$S_1 = \varphi_{ik}\varphi^{ik} = g^{i\alpha}g^{k\beta}\varphi_{\alpha\beta}\varphi_{ik},\quad S_2 = f_{ik}f^{ik} = g^{i\alpha}g^{k\beta}f_{\alpha\beta}f_{ik},$$

$$(39)\qquad S_3 = \varphi_{ik}f^{ik} = f_{ik}\varphi^{ik} = g^{i\alpha}g^{k\beta}\varphi_{\alpha\beta}f_{ik}.$$

Всего таким образом образуется девять координатных инвариантов. Из них можно образовать ряд масштабных инвариантов. Перейдем к образованию этих масштабных инвариантов.

2. Если какой либо координатный инвариант при изменении масштаба с помощью умножения метрического тензора на любую функцию координат λ получает множитель λ^e, т.е. если мы имеем равенство:

$$\tilde{A} = \lambda^e A,$$

то мы будем координатный инвариант A называть относительным масштабным инвариантом веса e.

Легко видеть, что координатные инварианты S_i определяемые формулами /39/ суть относительные масштабные инварианты веса - 2.

Из координатных инвариантов определяемых формулами /37/ и /38/ и из инварианта R легко образовать линейные комбинации, которые будут относительными масштабными инвариантами. Производя простые вычисления будем иметь следующие равенства:

$$
(40)\quad
\begin{aligned}
\tilde{\varphi} &= \frac{1}{\lambda}\left(\varphi + \Delta\psi - 2Z_1\psi\right),\\
\tilde{\Phi} &= \frac{1}{\lambda}\left(\Phi - 2\psi - \frac{n-2}{2}\Delta\psi + \frac{n-2}{2}Z_1\psi\right),\\
\tilde{f} &= \frac{1}{\lambda}\left(f + \Delta\psi + 2Z_2\psi\right),\\
\tilde{F} &= \frac{1}{\lambda}\left(F + 2\psi - \frac{n-2}{2}\Delta\psi - \frac{n-2}{2}Z_2\psi\right),\\
\tilde{\mu} &= \frac{1}{\lambda}\left(\mu - \Delta\psi - Z_2\psi + Z_1\psi\right)
\end{aligned}
$$

где (операции) Z_1 и Z_2 определяются равенствами:

$$
(41)\quad Z_1\psi = \varphi^{\alpha}\frac{\partial\psi}{\partial x_\alpha} = g^{\sigma\alpha}\varphi_\sigma\frac{\partial\psi}{\partial x_\alpha},\quad Z_2\psi = f^{\alpha}\frac{\partial\psi}{\partial x_\alpha} = g^{\sigma\alpha}f_\sigma\frac{\partial\psi}{\partial x_\alpha},
$$

а остальные обозначения были нами уже введены в конце § 3. Пользуясь формулами /28/ и /40/ образуем следующие два относительных (масштабных) инварианта веса —I.

$$
(42)\quad
\begin{aligned}
\Lambda_1 &= R + (n-1)\Phi + \frac{(n-1)(n-2)}{4}\varphi,\\
\Lambda_2 &= \varphi + f + 2\mu.
\end{aligned}
$$

Первый из этих инвариантов есть не что иное, как инвариант применяемый Weyl'ем и обозначаемый им через F /кривизна тензориальных параметров пространства разбираемого Weyl'ем/ x); второй инвариант для пространств разбираемых Weyl'ем обращается тождественно в нуль.

Из двух относительных масштабных инвариантов веса -I и из трех относительных масштабных инвариантов веса - 2 нами полученных, не трудно образовать абсолютный масштабный инвариант или, общнее, относительный инвариант веса e по следующей формуле:

$$
(43)\quad \Lambda = \Lambda_1^{-e}\,\Theta\left(\Lambda_1, \Lambda_2, S_1^{\frac{1}{2}}, S_2^{\frac{1}{2}}, S_3^{\frac{1}{2}}\right),
$$

где Θ есть однородная функция нулевого измерения от своих аргументов. Интегральным инвариантом будет очевидно выражение:

---

x) У Weyl'я знак кривизны обратный применяемому в настоящей заметке.

$$\mathcal{J} = \int \mathfrak{M}\, dV = \int \Lambda_1^{\frac{n}{2}}\, \Phi\left(\Lambda_1, \Lambda_2, S_1^{\frac{1}{2}}, S_2^{\frac{1}{2}}, S_3^{\frac{1}{2}}\right) \sqrt{g}\, dV,$$

где $dV = dx_1 dx_2 \ldots dx_n$.

Weyl пользуется в своих работах частным видом под,интегральной функции $\mathfrak{M}$, которая в наших обозначениях напишется так:

$$\mathfrak{M} = \Lambda_1^2 \sqrt{g}\left(a + b\left(\frac{S_1^{\frac{1}{2}}}{\Lambda_1}\right)^2\right),$$

где a и b постоянные величины.

3. В заключение позволю себе, хотя это и не относится к предмету настоящей заметки, коснуться вопроса о физическом значении развитых выше геометрических соображений. Исходя из равенства нулю вариации интегрального инварианта $\mathcal{J}$, *Weyl* получает с одной стороны уравнения Эйнштейна, с другой сторон уравнения *Maxwell'a*, в том виде, в каком они пишутся при наличности теории *Mie*. При этом *Weyl* отождествляет масштабный вектор с четырехмерным электромагнитным потенциалом; пользуясь общими соображениями относительно свойств интеграла ~~инварианта~~ вначале *Weyl* получает общую форму уравнений электродинамики, а вводя частный вид для мировой функции $\mathfrak{M}$ он приходит к уравнениям Максвелла и теории *Mie*. Т.к. в развитой нами геометрии имеется два масштабных вектора, то вполне естественно возникает мысль о возможности отождествить их с четырехмерным магнитным потенциалом и с четырехмерным вектором тока /*Viererstrom*/; легко, пользуясь безконечно малым изменением масштаба, получить ряд указаний относительно характера уравнений Максвелла и тех дополнительных соотношений, которые с развитой нами точки зрения заменят теорию *Mie*. Гораздо более трудной задачей является выбор такого частного вида мировой функции $\mathfrak{M}$, который бы дал указанные дополнительные соотношения без тех противоречий в области электр~~массовой~~онной теории, к каковым, к сожалению, приводит теория *Mie*.

Я оставляю в настоящей заметки открытым вопрос о возможности р~~азъяснения~~озыскания мировой функции $\mathfrak{M}$ с только что отмеченными свойствами.

А. Фридман,
Профессор механики Петроградского Политехнического Института.

Петроград,
15 Апреля 1922.